חשבון דיפרנציאלי לתלמידי כלכלה וניהול

שיעור 8

רועי מימרן

נושאי השיעור

- יחידות 5-6:
- פונקציית קוב-דאגלס
- מבט נוסף על עש"ע
- משפט הפונקציות הסתומות
- MRS
- קואזי קמירות/קעירות

פונקציית קוב-דאגלס
Cobb–Douglas production function

- פונקצייה לתיאור תפוקה של הייצור שהוצגה ונחקרה ע"י שני הכלכלנים בתחילת המאה ה-20.
- הנוסחה היא $Y = AL^{\beta}K^{\alpha}$, כאשר:
- Y – התפוקה הכוללת;
- A – מקדם התפוקה (פרמטר קבוע);
- L – משתנה המייצג את כמות העובדים/היקף העבודה;
- K – משתנה המייצג את כמות ההון בצורת מכונות וציוד;
- β,α פרמטרים קבועים (המייצגים את גמישות התפוקה ביחס להון ולכמות העובדים).
- תרגיל: נחשב את התפוקות השוליות להון ולעבודה.
- האם הפונקציה $u(x,y) = xy$ היא ממשפחת קוב-דאגלס?

מבט נוסף על עקומות שוות ערך

- עש"ע בפני עצמה מייצגת את הקשר ההדדי בין שני המשתנים ולאו דווקא את כל תכונות הפונקציה.
- למשל, ניקח את שתי הפונקציות: $f(x,y) = x^2y, \quad g(x,y) = 2lnx + lny$.
- כל עש"ע שלהן היא מהצורה $f(x,y) = c, g(x,y) = d$ בהתאמה.
- נתבונן במשוואת העש"ע $x^2y = c$, נוציא ln משני האגפים:
- $lnc = \ln(x^2y) = \ln(x^2) + lny = 2lnx + lny$
- אז אם נרשום $d = lnc$ נראה שזו בדיוק עש"ע של g!
- כלומר: **לשתי הפונקציות יש את אותן עש"ע בדיוק**. ההבדל הוא באינדקס שעליהן וקצב גידול האינדקסים.

עש"ע – דוגמא נוספת

- ניקח את הפונקציות: $f(x,y) = 3x + 7y,\ \ g(x,y) = \frac{12}{3x+7y}$.
- עש"ע של המשוואה הראשונה היא מהצורה $3x + 7y = c$ (קו ישר). נרשום את המשוואה $12 = 12$ ונחלק אותה במשוואה הקודמת: $\frac{12}{c} = \frac{12}{3x+7y}$.
- אם נרשום $d = \frac{12}{c}$ נגלה שהמשוואה היא בעצם מהצורה $g(x,y) = d$ כלומר עש"ע של g.
- ניתן לעשות זאת גם בכיוון ההפוך ולהראות **שלשתי הפונקציות יש את אותן עש"ע**.
- **איזה הבדל מהותי יש בכל זאת בין שתי המפות?**

שימוש בנגזרות חלקיות כדי לקבוע את כיוון החץ השמן

- נגזרות חלקיות אומרות לנו מה קצב השינוי בפונקציה כאשר המשתנה עולה, ניתן להשתמש בזה כדי לקבוע את כיוון החץ השמן של מפת העש"ע (כיוון העליה באינדקס):

נגזרת ביחס ל-x	נגזרת ביחס ל-y	כיוון החץ
$f'_x>0$	$f'_y>0$	למעלה וימינה
$f'_x<0$	$f'_y>0$	למעלה ושמאלה
$f'_x>0$	$f'_y<0$	למטה וימינה
$f'_x<0$	$f'_y<0$	למטה ושמאלה

<u>דוגמא</u>: נשרטט את מפת העש"ע של $f=y-x$ ונשתמש בטבלה כדי לקבוע את כיוון החץ.

משפט הפונקציות הסתומות – הקדמה
פונקציה סתומה מול פונקציה מפורשת (עמ' 40)

- <u>פונקציה מפורשת</u> היא פונקציה שאפשר לחשב את הערך שלה בעזרת הצבה בנוסחה: $y = x + 2^x$, $z = e^{x+y}$ וכן הלאה.
- <u>פונקציה סתומה</u> (implicit function) היא פונקציה שכדי לחשב את הערך שלה צריך לפתור משוואה ולחלץ משתנה. לדוגמא: g היא פונקציה שמתאימה למספר x את y שפותר את המשוואה:
- $y^5 + y - x^2 - x = 0$.
- g היא פונקציה כי היא מתאימה לכל מספר x מספר יחיד y, אבל לא ניתן להציג פונקציה זו בצורה מפורשת.
- באופן כללי, פונקציה מהצורה $f(x,y) = 0$ או $f(x,y) = c$ כאשר קיים y יחיד כזה היא *פונקציה סתומה*.

משפט הפונקציות הסתומות
(עמ' 42 ביחידות 5-6)

- נניח ש-y היא פונקציה של x שמוצגת בעזרת המשוואה: $f(x,y)=c$. אנו מעוניינים לחשב את הנגזרת של y ביחס ל-x.
- משפט הפונקציות הסתומות (מפ"ס) קובע שהנגזרת תהיה שווה לביטוי הבא:
- $y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$
- כלומר מחשבים את הנגזרות החלקיות של f ביחס ל-x וביחס ל-y ומוצאים את המנה שלהן.

משפט הפונקציות הסתומות - דוגמא

- נחשב את הנגזרת של y ביחס ל-x בהינתן המשוואה: $f(x,y) = y^5 + y - x^2 - x = 0$.
- פתרון: נחשב את הנגזרות החלקיות: $f_1 = -2x - 1$.
- $f_2 = 5y^4 + 1$
- כעת נפעיל את המשפט:
- $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = -\frac{-2x-1}{5y^4+1} = \frac{2x+1}{5y^4+1}$
- ניתן לראות כי סימן הנגזרת הוא לפי הסימן של $2x + 1$, ובפרט, הנגזרת חיובית, כלומר הפונקציה עולה כאשר x חיובי (ברביע הראשון).

שימוש במפ"ס כדי לחקור עש"ע

- נתונה פונקציה של שני משתנים $z = f(x,y)$. אנו רוצים לחקור את העש"ע שלה ולבדוק אם היא עולה או יורדת.
- נסתכל את משוואת העש"ע מהצורה $f(x,y) = c$, זוהי בדיוק משוואה של פונקציה סתומה, ניתן להפעיל עליה את משפט הפונקציות הסתומות.
- אחרי שמצאנו את הביטוי לנגזרת של y ביחס ל-x, ננסה לראות מתי הוא חיובי או שלילי (במיוחד ברביע הראשון) וכך לקבוע מתי העש"ע עולה או יורדת.

שיטות לחקירת עש"ע

נתונה פונקציה $f(x,y)$ ורוצים לחקור את העש"ע $f(x,y)=c$.

חקירה קצרה

- מחלצים את y בתור פונקציה מפורשת של x.
- גוזרים את הפונקציה כדי למצוא תחומי עלייה/ירידה של העש"ע.
- גוזרים פעם שניה כדי למצוא תחומי קמירות/קעירות.

שימוש במפ"ס

- מחשבים את הנגזרות החלקיות של הפונקציה כדי להפעיל את מפ"ס.
- מוצאים ביטוי לנגזרת של y ביחס ל-x.
- ממנו מסיקים לגבי תחומי עלייה/ירידה ומסקנות נוספות.

דוגמא פשוטה – מציאת שיפוע עש"ע

- נתונות הפונקציה והעש"ע $u = 3x + 4y \equiv 24$, מה שיפוע העקומה (למשל בנקודה T)?
- <u>דרך 1 – חקירה קצרה</u>: נחלץ ביטוי מפורש: $3x + 4y = 24$
- $4y = 24 - 3x$
- $y = 6 - \frac{3}{4}x \Rightarrow y' = -0.75$
- <u>דרך 2 – מפ"ס</u>: $u = 3x + 4y$.
- $u_x = 3, u_y = 4$ ולכן נקבל: $y' = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{3}{4} = -0.75$
- כמובן שקיבלנו את אותה תוצאה בשתי הדרכים.

תרגיל – משפט הפונקציות הסתומות

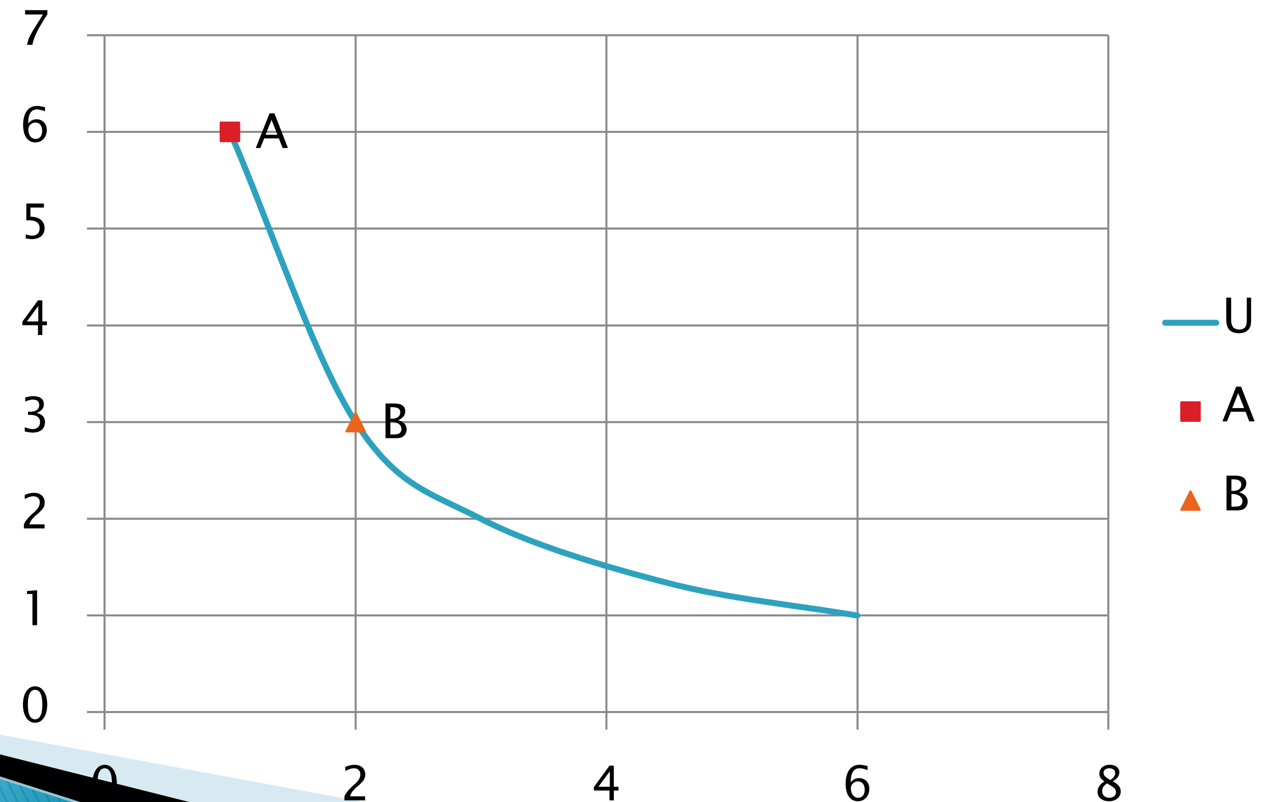
- נתונה העש"ע $(x+y)^2 + y^2 = 20$.
- מעבירים קו תקציב משיק:
  $2x + 3y = I$
- א. מהי נקודת ההשקה ומהו התקציב I?
- ב. הוכיחו כי לאורך העקומה מתקיים:
- $-0.5 \le y' \le -1$

MRS – שיעור התחלופה השולי

- שיעור התחלופה השולי (MRS, קיצור של Marginal Rate of Substitution) מייצג את הכמות ממוצר אחד שעליה מוכן פרט לוותר על מנת לקבל יחידה אחת ממוצר שני.
- כאשר פונקציית התועלת של הפרט היא $u(x,y)$, ניתן יהיה להציג את שיעור התחלופה השולי על עקומת האדישות באופן הבא:
- $MRS(u) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta x} = -(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}) = -\frac{dy}{dx} =$
- $= -\left(-\frac{u_1(x,y)}{u_2(x,y)}\right) = \frac{u_1(x,y)}{u_2(x,y)}$
- סיכום: $\boldsymbol{MRS(u) = \frac{u_1(x,y)}{u_2(x,y)}}$

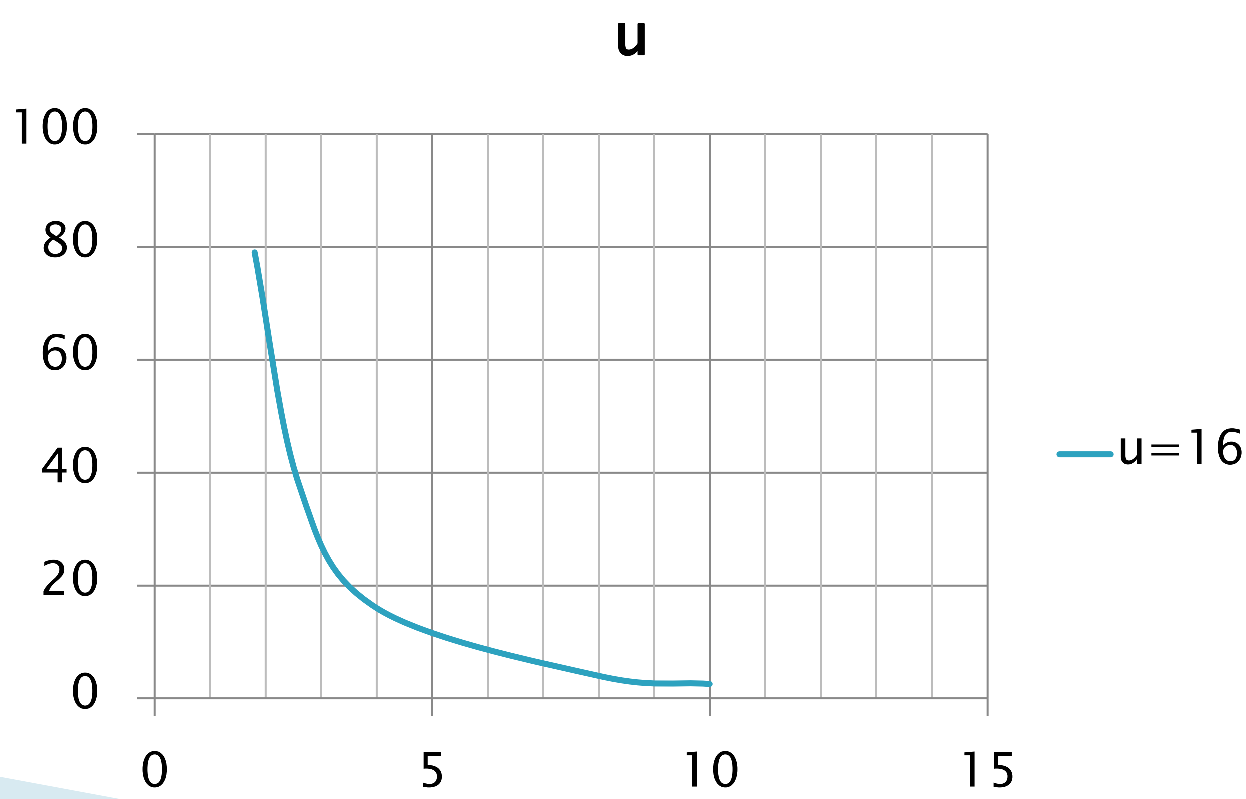
MRS – תרגיל לכיתה

- נתונה הפונקציה $u = xy$. חשבו את ה-MRS שלה בנקודה A(1,6) ובנקודה B(2,3).



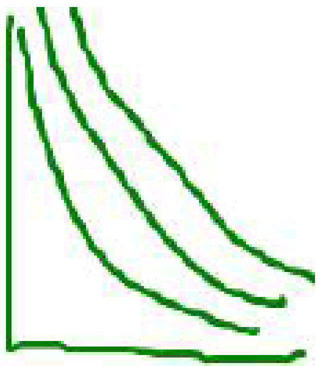
MRS – תרגיל 2

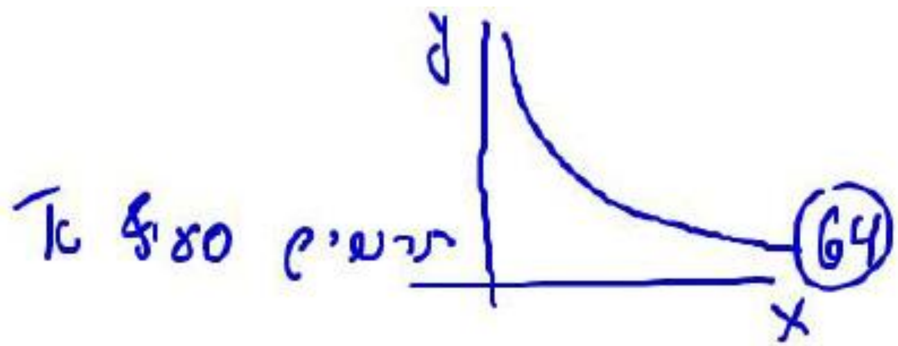
- על עש"ע 16 של תועלת $u = x\sqrt{y}$ סמנו את הנקודות (הסלים) שבהם $MRS < 1$.



שאלה 3 – MRS

- א. לפניכם תועלת $u = (2lnx + lny)^2$ והעש"ע $u = 64$.
כיצד משתנה MRS לאורך העקומה הנדונה?





- ב. מרחיבים את העקומה למפת עקומות (ראו בירוק). כיצד משתנה MRS לאורך הקרן $y = \frac{x}{3}$?

שיעורי בית לשבוע הבא

- <u>בספר יחידות 5-6</u>:
- לקרוא את סעיפי הלימוד עד עמ' 79.
- <u>מתוך שאלות לדוגמא ולחזרה</u>:
- עמ' 55 שאלה 144
- עמ' 57 שאלה 147

חקירת עש"ע של פונקציה באמצעות שיטת "קואזי" קמירות/קעירות (עמ' 102)

- נניח שיש לנו פונקציה של שני משתנים $f(x,y)$ ואנו מעוניינים לחקור את העש"ע שלה.
- כאמור, אנו יכולים לחשב את הנגזרות החלקיות שלה, ולהפעיל את משפט הפונקציות הסתומות כדי למצוא ביטוי לשיפוע שלה: $-\frac{f'_x}{f'_y}$ ולראות אם היא עולה או יורדת.
- בשלב הבא נרצה לברר אם העש"ע קמורות או קעורות.
- נניח כעת שמתקיים $f'_x, f'_y \geq 0$ בתחום הרלוונטי, למשל ברביע הראשון (אחרת החלק הזה לא רלוונטי).
- נחשב את כל הנגזרות השניות: $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} = f''_{yx}$.

חקירת עש"ע של פונקציה באמצעות שיטת "קואזי" קמירות/קעירות - המשך

- נרשום את הביטוי: $D = f_{11}{f_2}^2 + f_{22}{f_1}^2 - 2f_{12}f_1f_2$
- נבדוק את הסימן של D (חיובי או שלילי). ואז לפי הטבלה הבאה:

תכונה של f	תכונה של העש"ע	סימן D
קואזי קעורה	עש"ע קמורה	D<0
קואזי קמורה	עש"ע קעורה	D>0

- כך נמצא את מגמת העש"ע ונוכל לשרטט אותן או להמשיך בניתוח. במידה ו-$D = 0$ השיטה לא נותנת לנו הכרעה.

קואזי קמירות/קמירות - דוגמא

- תרגיל: שרטטו ברביע I מפה של עש"ע של הפונקציה $u(x,y) = y + 2\sqrt{x}$.
- פתרון: נחשב את הנגזרות החלקיות של u:
- $u'_x = (2x^{0.5})' = 2 * \frac{1}{2} * x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$
- $u'_y = 1 > 0$
- $y' = -\frac{u'_x}{u'_y} = -\frac{\text{חיובי}}{\text{חיובי}} < 0$
- ומכאן שכל העקומות יורדות. כמו כן, מכיוון ש-$u_x, uy \geq 0$ מותר להיעזר בתנאי הקואזי על-מנת לברר האם העש"ע קמורות או קעורות.

קואזי קמירות/קמירות – המשך דוגמא

- נכין את הנגזרות החלקיות מסדר שני:
- $u_{11} = (x^{-0.5})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0$
- $u_{12} = u_{21} = 1' = 0$
- $u_{22} = 1' = 0$
- $D = u_{11}{u_2}^2 + u_{22}{u_1}^2 - 2u_{12}u_1u_2 < 0$

<0 >0 0 0

- <u>מסקנה</u>: $D < 0$ ולכן העש"ע קמורות.
- <u>סיכום</u>: מציירים את נקודות החיתוך עם הצירים וביניהן עקומה יורדת וקמורה.

שיטות לחקירת עש"ע - סופי

נתונה פונקציה $f(x,y)$ ורוצים לחקור את העש"ע $f(x,y) = c$.
מוצאים נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש) בהצבת $x=0$ ואח"כ $y=0$.

<u>חקירה קצרה</u>

- מחלצים את y בתור פונקציה מפורשת של x.
- גוזרים את הפונקציה כדי למצוא תחומי עלייה/ירידה של העש"ע.
- גוזרים פעם שניה כדי למצוא תחומי קמירות/קעירות.

<u>שימוש במפ"ס וקואזי</u>

- מחשבים את הנגזרות החלקיות של הפונקציה כדי להפעיל את מפ"ס.
- מוצאים ביטוי לנגזרת של y ביחס ל-x כדי למצוא תחומי עלייה/ירידה של העש"ע.
- אם ניתן, מפעילים בדיקת קואזי כדי למצוא תחומי קמירות/קעירות של עש"ע.